9º ENTEC – Encontro de Tecnologia: 23 a 28 de novembro de 2015

CRITÉRIO DE VON MISES SEM O USO DAS TENSÕES NORMAIS PRINCIPAIS

Iago Porto Almeida Borges[1]; Roberta Bastos de Oliveira[2]; Eliane Regina Flôres Oliveira[3]
[1, 2, 3] Universidade Federal de Uberlândia
iago.porto@yahoo.com.br[1], eliane@infis.ufu.br[3]

Resumo

O presente artigo incumbe-se de detalhar o estudo feito acerca da Teoria de Von Mises – “Teoria da Máxima Energia de Distorção” – com a finalidade de propor uma nova formulação sem o uso das tensões normais principais, formulação essa que não é apresentada nos livros de Resistência dos Materiais, embora simplifique a análise da segurança de elementos estruturais.

A formulação proposta, assim como a que utiliza as tensões normais principais, permite particularidades, ou seja, a simplificação para estado plano e estado com apenas uma tensão – em um único plano.

Na grande maioria das aplicações práticas do critério de Von Mises, tem-se, primeiramente, as tensões normais acompanhadas por tensões cisalhantes, ou seja, σ_x, σ_y, σ_z e τ_x, τ_y, τ_z, fato que por inúmeras vezes torna mais trabalhosa a resolução.

A formulação proposta e provada pelo presente artigo, tem, portanto, o objetivo de simplificar e dar agilidade à resolução de inúmeros problemas práticos ligados ao critério e ao estudo da Resistência dos Materiais.

A formulação sem fazer uso das tensões normais principais está provada e demonstrada através da resolução de exercícios e casos práticos, sendo eles casos em que há tensões em um, dois e três planos, provando assim a simplificação, particularidade e variada aplicabilidade do método.

Palavras-chave: Resistência dos Materiais. Materiais dúcteis. Segurança estrutural.

1 Introdução

O cálculo de uma estrutura tem por objetivo determinar se a mesma satisfaz as exigências de segurança que são feitas a ela. Para tal, é preciso inicialmente formular os princípios e critérios que devem servir de base para avaliação das condições de segurança. (FEODOSIEV, 1980)

Em função da variedade de materiais usados na engenharia, existem critérios específicos para materiais frágeis e outros, para dúcteis. Um material é frágil quando a análise de seu “Diagrama Tensão x Deformação” apresenta, praticamente, a fase elástica como resultante de todo o ensaio, e sua ruptura acontece logo após o regime elástico. Enquanto um material dúctil, apresenta uma considerável deformação plástica antes de sua ruptura. A Teoria de Von Mises tem esse último como fonte de estudo.

Os elementos estruturais são projetados para que o material que os compõem, sendo esse dúctil, não venha a escoar pela ação dos carregamentos esperados. Dessa forma, ao projetar-se uma estrutura com material dúctil, deve-se estabelecer um limite superior para o estado de tensão que defina sua falha

– limite de escoamento à tração, determinado em laboratório. (REIS, 2005)
Para materiais dúcteis, portanto, destaca-se a aplicação do critério de Von Mises no dimensionamento, critério esse que tem uma nova formulação proposta no presente artigo, a qual não faz uso das tensões normais principais cujo objetivo é facilitar sua aplicação na área de Resistência dos Materiais.

2 Materiais e métodos

A teoria da "Máxima Energia de Distorção" – teoria de Von Mises – é a que melhor se correlaciona com os dados experimentais e, portanto, é em geral mais utilizada. Nela, considera-se que o escoamento ocorre quando a energia associada à mudança de forma de um corpo – energia de deformação volumétrica – sob carregamento multiaxial for igual à energia de distorção em um corpo de prova, de mesmas propriedades, ensaiado à tração e submetido a um carregamento uniaxial. (REIS, 2005)

Uma vez que a energia de distorção unitária, no ponto mais perigoso da peça, não deve exceder à energia de distorção unitária no limite elástico, no ensaio de tração, tem-se como resultado do desenvolvimento tradicional do critério de Von Mises para o estado triplo de tensão a Equação 1 e a Equação 2:

$$S_{yt}^2 = \left[\sigma_1^{\,2} + \sigma_2^{\,2} + \sigma_3^{\,2} - \left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3\right)\right] \quad (1)$$

$$\sigma_{eq} = \left[\sigma_1^{\,2} + \sigma_2^{\,2} + \sigma_3^{\,2} - \left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3\right)\right]^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

Para o estado plano de tensão onde σ_a e σ_b são as tensões normais principais, a expressão apresenta-se como na Equação 3.

$$\left(\sigma_a^{\,2} + \sigma_b^{\,2} - \sigma_a\sigma_b\right)^{\frac{1}{2}} \leq S_{yt} \quad (3)$$

Seguindo a formulação trivial, a maneira mais garantida de resolver este problema consiste em ensaiar um corpo de prova com a proporção das tensões principais dadas até a sua ruína (ruptura ou início de escoamento) e estabelecer os valores seguros de σ_1, σ_2 e σ_3.

Este método deve ser abandonado por exigir um ensaio para cada combinação possível de tensões normais principais. Além disto, estes ensaios são complicados, pois exigem máquinas e dispositivos sofisticados. Resulta ser necessário dispor de uma teoria ou hipótese que discrimina, de uma maneira arbitrária, mas com bom senso, o fator responsável pela falha, sem recorrer toda vez à ensaios trabalhosos, limitando-se ao conhecimento dos resultados dos ensaios de tração e compressão do material da peça (ensaios monoaxiais). Tais fatores poderiam ser tensões normais ou tangenciais, que resultam na simplificação do método, conforme proposto no presente artigo.

A metodologia utilizada para elaboração é analítica e parte de conceitos básicos do estudo de Resistência dos Materiais, tais como invariantes, equivalência e proporcionalidade entre tensões.

Para formulação do critério de Von Mises sem uso das tensões normais principais, parte-se do invariante I_1, dado pela Equação 4.

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (4)$$

Elevando-se ambos os membros de I_1 ao quadrado tem-se, então, a Equação 5.

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2\sigma_x\sigma_y + 2\sigma_y\sigma_z + 2\sigma_x\sigma_z - 2\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2\sigma_3 - 2\sigma_1\sigma_3 \quad (5)$$

Utilizando-se, também da Equação 6, a qual representa o invariante I_2 e substituindo-a na Equação 1, juntamente com a Equação 5, tem-se a Equação 7 que representa a formulação desejada.

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xZ}^2 - \tau_{yz}^2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 \quad (6)$$

$$S_{yt}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_x\sigma_z + 3\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2\right) \quad (7)$$

Analogamente à formulação tradicional do critério, tem-se a tensão equivalente para o estado triplo de tensão sem o uso das tensões normais principais, apresentada pela Equação 8.

$$\sigma_{eq} = [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_x\sigma_z + 3\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2\right)]^{1/2} \quad (8)$$

Para casos de cisalhamento puro, tem-se a tensão equivalente representada pela Equação 9 e, para casos em que há apenas uma tensão normal e uma tangencial, pela Equação 10.

$$3\tau_{xy}^2 < S_{yt}^2 \text{ ou } \tau_{xy} < \frac{S_{yt}}{\sqrt{3}} \quad (9)$$

$$\sigma_{eq} = \left[\sigma^2 + 3\tau^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

A análise da formulação é realizada através da resolução de exercícios, utilizando-se ambas as formulações, tanto a proposta quanto a tradicional, e comparando os resultados obtidos.

3 Resultados

Para comprovar a veracidade da formulação apresentada, utiliza-se a resolução do Exercício 1 e Exercício 2, aos quais aplica-se as duas formulações do critério de Von Mises, uma que se utiliza das tensões normais principais (Formulação tradicional) e outra que não se utiliza (Formulação proposta).

Exercício 1 – Determinar a tensão equivalente de um ponto de uma peça onde as tensões conhecidas são:

$$\sigma_x = 90;\ \sigma_y = 60;\ \sigma_z = 30;\ \tau_{xy} = 30;\ \tau_{yz} = 30;\ \tau_{xz} = 60.$$

A matriz tensor-tensão pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_p & 30 & 60 \\ 30 & \sigma_y - \sigma_p & 30 \\ 60 & 30 & \sigma_z - \sigma_p \end{vmatrix}$$

(MPa)

E seu determinante resulta em: $\sigma_p^3 - 180\sigma_p^2 - 4500\sigma_p - 54000 = 0$, cujas três raízes reais são:

r_1= 146,85;
r_2= -8,77 e
r_3= 41,92

Essas raízes correspondem às tensões normais principais desse ponto:

$$\sigma_1 = 146{,}85 MPa$$
$$\sigma_2 = 41{,}92 MPa$$
$$\sigma_3 = -8{,}77 MPa.$$

Resolvendo do modo trivial, a partir da equação:

$$S_{yt} = \sigma_{eq} = \sqrt{\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3\right)\right]} = 137{,}47 MPa$$

Utilizando a equação deduzida (Equação 8) e substituindo diretamente os valores fornecidos pelo exercício, sem a necessidade de se obter as tensões normais principais, obtém-se o mesmo valor (c.q.d):

$$S_{yt} = \sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_x\sigma_z + 3\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2\right)} = 137{,}47 MPa$$

Exercício 2 - Determinar a tensão equivalente de um ponto de uma peça dada a matriz tensor-tensão:

$$\begin{vmatrix} -100 & -20 & 0 \\ -20 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(MPa)

Observa-se que o plano z é plano principal, e portanto, que $\sigma_z = 0$ é uma tensão normal principal. Usando as propriedades do Círculo de Mohr, obtém-se:

$\sigma_{máx} = 42{,}8 MPa$ e $\sigma_{mín} = -102{,}8 MPa$.

Portanto,
$\sigma_1 = 48{,}28 MPa, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -102{,}8 MPa.$
resultando em:

$$S_{yt} = \sigma_{eq} = \sqrt{\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3\right)\right]} = 129{,}61 MPa.$$

E, utilizando-se a equação para estado plano de tensão:

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2 \le S_{yt}^2$$

tem-se que:

$$S_{yt} = \sigma_{eq} = 129{,}61 MPa$$

(c.q.d.)

4 Discussão

Como se queria demonstrar com o presente trabalho desenvolvido, é viável a utilização do critério de Von Mises sem fazer uso das tensões normais principais, uma vez que este método dá agilidade à resolução de exercícios e questões práticas.

A nova formulação para a Teoria de Von Mises permite, portanto, a escolha entre duas maneiras de encontrar a tensão equivalente, tanto para o estado triplo de tensão, quanto para o estado plano e para o cisalhamento puro.

5 Conclusão

O desenvolvimento da Teoria de Von Mises sem o uso das tensões normais principais trata-se de um facilitador para o entendimento e aplicação da mesma, uma vez que proporciona agilidade na obtenção da tensão equivalente.

Dessa forma, além de proporcionar as simplificações apresentadas pela formulação tradicional, no que se refere a valores, é muito satisfatória, uma vez que a variação de resultados, utilizando-se de ambos os métodos, é irrisória, sendo nula em inúmeros casos e aplicações.

A possibilidade de escolha entre ambas as formulações proporciona ao estudante maior facilidade de entendimento e ao professor a possibilidade de elaboração de diferentes métodos de ensino.

Referências

Reis, J. E. T. **Resistência dos Materiais.** 6.ed. Uberlândia: GRÁFICA UFU, 2005.

Feodosiev, V. I. **Resistência de Materiales.** 2.ed. Moscou: MIR, 1980.